Fibonacci-verwandte Zahlenreihen

1 Allgemeine Form der Formel von Binet

Die Formel von Binet, mit der man ein beliebiges f_n der Fibonacci-Folge (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...) berechnen kann, lautet wie folgt:

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \tag{1}$$

Eine allgemeinere Form, die nicht auf die $\sqrt{5}$ beschränkt ist, wäre folgende:

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{m}}{2}\right)^n}{\sqrt{m}} \tag{2}$$

Es ergibt sich somit für jedes m eine andere Zahlenfolge, die der Fibonacci-Zahlenfolge ähnelt:

m	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1.25	1.5	1.8125	2.1875	2.640625	3.1875
3	1	1	1.5	2	2.75	3.75	5.125	7
4	1	1	1.75	2.5	3.8125	5.6875	8.546875	12.8125
5	1	1	2	3	5	8	13	21
6	1	1	2.25	3.5	6.3125	10.6875	18.57812	31.9375
7	1	1	2.5	4	7.75	13.75	25.375	46
8	1	1	2.75	4.5	9.3125	17.1875	33.48438	63.5625
9	1	1	3	5	11	21	43	85

(3)

2 rekursive Definition dieser Zahlenfolgen

Alle diese Folgen können rekursiv definiert werden:

$$f_1 = 1; f_2 = 1; f_{n+2} = \frac{m-1}{4} f_n + f_{n+1}; n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

(leider nicht bewiesen, sondern nur beobachtet)

Für alle Folgen mit $m = 1 + 4p; p, m \in \mathbb{N}$, also z.B. für $m = 5$ (die Fibonacci-Reihe) oder $m = 13$ sind die Ergebnisse natürliche Zahlen.

Auf das Beispiel mit den Kaninchen übertragen, bringt ein gebärfähiges Paar jeden Monat $\frac{m-1}{4}$ Paare zur Welt. Die Reihen mit $m = 9$, $m = 13$, $m = 17$ etc. könnten vielleicht in der Natur eine Rolle spielen.