Funktionsanpassung

1 Anpassung von wenigen Punkten

Oft ist eine Kurve gesucht, die einige Punkte verbindet (z.B. geometrische Probleme wie Straßen etc.). Hier sollen alle Bedingungen *genau* erfüllt werden, alle Punkte also auch genau auf der Funktion liegen. Es empfiehlt sich meist folgendes Vorgehen:

1. Bedingungen aufstellen
2. Funktionstyp auswählen
3. Gleichungssystem lösen $\rightarrow$ Parameter der Funktion

1.1 Bedingungen aufstellen

Es gibt Bedingungen für die Funktion $f(x)$ selbst, für die Ableitung $f'(x)$ und u.U. für die 2. Ableitung $f''(x)$. Jede der Bedingungen wird durch eine Gleichung wie $f(50) = 100$ oder $f'(10) = g'(10)$ angegeben. Systematisch kann man alle Bedingungen wie folgt aufstellen:

- $f(x)$: Alle angegebenen Punkte liegen auf der Funktion, für jeden Punkt gibt es eine Bedingung (Einsetzen der Werte für x und y).
- $f'(x)$: Damit es keine Knicke gibt, muss die Funktion an allen Übergängen (z.B. zu Geraden am Rand des angepassten Bereichs oder zu einer anderen Funktion) die gleiche Steigung wie die benachbarte Funktion haben.
- $f''(x)$: Wird ein besonders *glatter* Übergang verlangt, so sind auch die zweiten Ableitungen wie die ersten gleichzusetzen.

1.2 Funktionstyp auswählen

Sollte nicht durch die Aufgabenstellung oder die angegebenen Punkte ein bestimmter Funktionstyp wie e-Funktion etc. erkennbar gefordert sein, führt man die Anpassung mittels einer ganzrationalen Funktion durch.

Dabei ergibt sich der Grad der Funktion durch die Anzahl der Bedingungen. Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades kann $n+1$ Bedingungen erfüllen.

Die gewählte Funktion wird dabei zunächst in allgemeiner Form aufgestellt, also z.B. $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ und diese allgemeine Form auch abgeleitet (wenn Bedinungungen für die 2. Ableitung vorliegen zweimal).

1.3 Gleichungssystem lösen

Jede Bedingung stellt ein Gleichung dar. Zusammen bilden alle Bedinungen ein Gleichungssystem, aus dem bei richtiger Auswahl der Funktion (2. Schritt) alle Parameter (hier z.B. a_2, a_1, a_0) berechnet werden können.

Dies ist von Hand durch Auflösen und Einsetzen möglich, bei größeren Gleichungssystemen empfiehlt sich aber der Einsatz des Taschenrechners.

Setzt man die gefundenen Werte der Parameter in die allgemeine Form der Funktion ein, so erhält man die gesuchte Funktion.

2 Anpassung von Messreihen

Die Anpassung längerer Messreihen läuft im Wesentlichen wie mit dem Taschenrechner gezeigt ab. Hier soll nur die s.g. *Transformation*, eine nützliche Methode zum einfacheren Finden der Anpassungsfunktion, vorgestellt werden.

Transformation

Oft wird im Aufgabentext gefordert, eine Reihe von Werten durch eine eher komplexe, z.B. gebrochen rationale Funktion anzupassen, wie z.B. durch $y = \frac{a}{(x+b)}$. Hier direkt die Parameter auszulesen ist schwierig.

In solchen Fällen versucht man daher, durch *Transformation* der Funktion und der angegebenen Werte eine einfache, möglichst lineare Zielfunktion zu erhalten. Im angegebenen Beispiel ist dies z.B. möglich, indem man auf beiden Seiten der Gleichung den Kehrbruch der Wurzel nimmt: $\frac{1}{\sqrt{y}} = (x+b) \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}$.

Wandelt man alle angegebenen y-Werte in $\frac{1}{\sqrt{y}}$ um, dann liegen diese Punkte ungefähr auf einer Geraden mit Steigung $\frac{1}{\sqrt{a}}$ und y-Achsenabschnitt $\frac{b}{\sqrt{a}}$, woraus man a und b ablesen und in die ursprüngliche Anpassungsvorschrift einsetzen kann.

Übung: Transformiere die folgenden Anpassungsvorschriften möglichst geschickt:

- $y = ln(m \cdot x + c)$
- $y = (x+a)^3 \cdot b$
- $y = e^{-\frac{x^2}{b}}$