Logarithmen und Substitution

Definition:

$$b^{\log_b a} = a$$

In den meisten Fällen ist $b = 10$. Das ist auch der Logarithmus, den die LOG-Taste am Taschenrechner berechnet. Einen anderen als den 10er-Logarithmus kann man mit dem Taschenrechner nicht berechnen.

Was nützt das? Nehmen wir an, wir kennen von einer Exponentialfunktion die folgenden Werte:

$$50000 = 2^t$$

Zum Beispiel: Die Bakterienpopulation in einer Nährlösung verdoppelt sich jede Stunde. Es sind jetzt schon 50000 Bakterien. Wieviel Zeit ist vergangen, seit ein einzelnes Bakterium eingesetzt wurde?

Vorgehen: Logarithmieren - Anwendung eines Log.-Gesetzes - Auflösen nach t - Berechnen

$$\begin{gathered}
\log 50000 = \log 2^t \\
\log 50000 = t \cdot \log 2 \\
\frac{\log 50000}{\log 2} = t \\
\frac{4.7}{0.3} = t \\
15.7 = t
\end{gathered}$$

Zum Rechnen mit Logarithmen gibt es Logarithmusgesetze, die der Formelsammlung entnommen werden können.

Ein häufiges Anwendungsgebiet von Logarithmen ist das Lösen von Exponentialgleichungen der allgemeinen Form $a \cdot m^{2x} + b \cdot m^x + c = 0$, also z.B. $5^{2x} - 3 \cdot 5^x = 0$:

Zuerst muss die Gleichung in oben stehende Normalform gebracht werden. Anstatt 5^{2x} kann man auch schreiben $(5^x)^2$. In dieser Gleichung wird nun einfach 5^x durch die neue Variable z ersetzt oder *substituiert*...

$$z^2 - 3 \cdot z = 0$$

...und die entstehende quadratische Gleichung gelöst (z.B. Mitternachtsformel).

Gibt es für z z.B. die Lösung 3, dann weiß man, dass $5^x = 3$ sein muss (da ja $5^x = z$ ist). Um die Lösung zu finden, wird wie im Beispiel mit den Bakterien vorgegangen:

$$log_{10}3 = log_{10}5^x \text{ also } log_{10}3 = x \cdot log_{10}5 \text{ und } x = \frac{log_{10}3}{log_{10}5}$$

und man hat die Lösung. Wenn es für z keine positive Lösung gibt, so gibt es auch für die Exponentialgleichung keine Lösung. Wenn es für z zwei positive Lösungen gibt, dann gibt es auch für die Exponentialgleichung zwei Lösungen.